

PEMBUKTIAN TEOREMA *BUTTERFLY* DI GEOMETRI BOLA

Yuman Agistia

Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika

e-mail: yumanagist08@gmail.com

Abstrak

Makalah ini membahas tentang pembuktian Teorema *Butterfly*. Teorema *Butterfly* pertama kali diperkenalkan oleh William Wallace di *The Gentlemen's Mathematical Companion* pada tahun 1803. Teorema *Butterfly* sudah banyak dan beragam cara untuk membuktikannya. Diantaranya dengan pendekatan teorema Pythagoras, membandingkan sudut, dan transformasi. Dalam pembuktian Teorema *Butterfly* kali ini, penulis membuktikan Teorema *Butterfly* ini di Geometri Bola.

Kata kunci : Teorema *Butterfly*, Geometri Bola.

1. PENDAHULUAN

Geometri bidang adalah salah satu bahasan dalam ilmu geometri yang membahas tentang geometri permukaan datar dan dua dimensi. Sebuah bidang adalah analog dua dimensi dari titik (nol dimensi), garis (satu dimensi) dan ruang (tiga dimensi) (Wikipedia, 2016). Di dalam pembahasan geometri terdapat teorema-teorema yang digunakan untuk membantu menyelesaikan permasalahan yang ada di pokok bahasan geometri, salah satunya adalah Teorema *Butterfly*.

Teorema *Butterfly* pertama kali diperkenalkan oleh William Wallace di *The Gentlemen's Mathematical Companion* pada tahun 1803. Kemudian tiga solusi mengenai pembuktian tersebut telah diperkenalkan pada tahun 1804, dan pada tahun 1805 Sir William Herschel mengajukan pertanyaan kepada Wallace lewat surat dan Pendeta Thomas Scurr ditanya pertanyaan yang sama pada tahun 1814 di *The Gentlemen's Diary or Mathematical Repository* (Wikipedia, 2016).

Teorema *Butterfly* ini berbunyi, misalkan M adalah titik tengah dari garis PQ dari sebuah lingkaran, di mana dua garis lain AB dan CD diambil; AD memotong PQ di X dan BC memotong PQ di Y . Buktikan bahwa M adalah juga titik tengah XY .

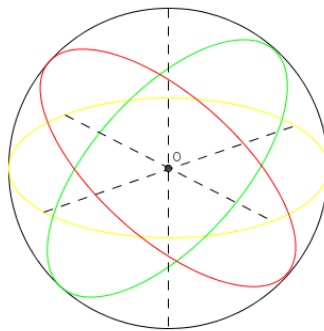
Teorema *Butterfly* sudah banyak dan beragam cara untuk membuktikannya. Diantaranya dengan pendekatan teorema Pythagoras, membandingkan sudut dan transformasi. Pada kesempatan kali ini, penulis akan membuktikan Teorema *Butterfly* di geometri bola.

2. MATERI PENDUKUNG

A. Geometri Bola (*Spherical Geometry*)

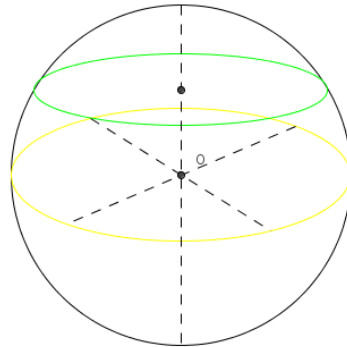
Geometri bola adalah geometri tiga dimensi dari permukaan bola (Wikipedia, 2013).

Lingkaran Besar adalah lingkaran pada permukaan bola yang titik pusatnya berimpit dengan titik pusat bola sehingga membagi bola menjadi 2 bagian sama besar.



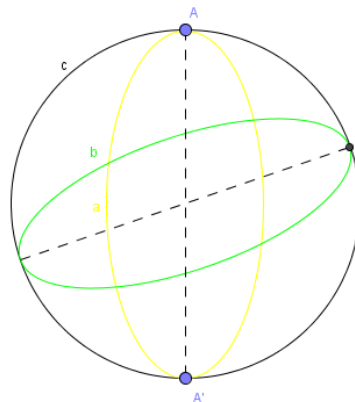
Gambar 1. Lingkaran Besar

Lingkaran Kecil adalah lingkaran pada permukaan bola yang titik pusatnya tidak berhimpit dengan titik pusat bola.



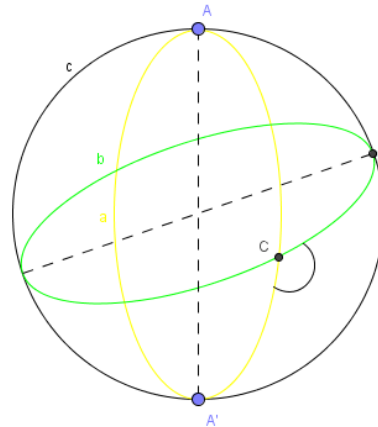
Gambar 2. Lingkaran Kecil

Kutub adalah titik potong kecil tengah yang tegak lurus bidang lingkaran besar dengan bola.



Gambar 3. Kutub A, A', B, C

Sudut adalah sudut perpotongan antara 2 lingkaran besar.



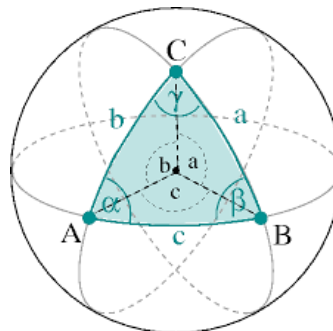
Gambar 4. Sudut Bola

B. Segitiga Bola

Segitiga bola adalah segitiga yang terletak pada permukaan bola yang terbentuk dari gabungan tiga busur lingkaran besar pada sebuah bola, perpotongan-perpotongan tiga busur lingkaran tersebut akan membentuk segitiga (Cresswell, 1816).

Siregar (2008) mengatakan bahwa, segitiga bola memiliki ketentuan sebagai berikut :

1. Jumlah 2 sudut bola selalu lebih besar dari sudut ke-3,
2. Jumlah ketiga sudutnya selalu lebih besar dari 180° ,
3. Tiap sudut besarnya selalu kurang dari 180° .



Gambar 5. Segitiga bola

C. Kesebangunan

Dua atau lebih bangun dikatakan sebangun jika memenuhi syarat-syarat sebagai berikut :

1. Panjang sisi-sisi yang bersesuaian pada bangun-bangun tersebut memiliki perbandingan senilai.
2. Sudut-sudut yang bersesuaian pada bangun-bangun tersebut sama besar.

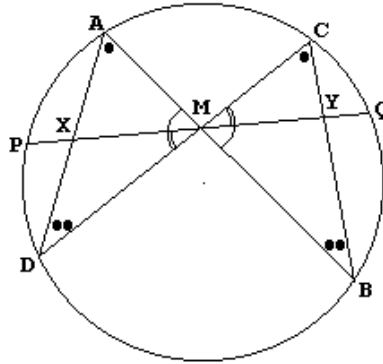
Berbeda dengan bangun datar yang lain, syarat-syarat untuk membuktikan kesebangunan pada segitiga memiliki keistimewaan tersendiri, yaitu sebagai berikut :

Unsur- Unsur yang diketahui Pada Syarat Kesebangunan Segitiga	
1. Sisi-sisi-sisi (s,s,s)	Perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian sama.
2. Sudut-sudut-sudut (sd,sd,sd)	Sudut-sudut yang bersesuaian sama besar.
3. Sisi-sudut-sisi (s,sd,s)	Dua sisi yang bersesuaian memiliki perbandingan yang sama dan sudut bersesuaian yang diapit sama besar.

3. MATERI POKOK

A. Teorema *Butterfly*

Misalkan M adalah titik tengah dari garis PQ dari sebuah lingkaran, di mana dua garis lain AB dan CD diambil; AD memotong PQ di X dan BC memotong PQ di Y . Buktikan bahwa M adalah juga titik tengah XY .



Gambar 6. Gambar Teorema *Butterfly*

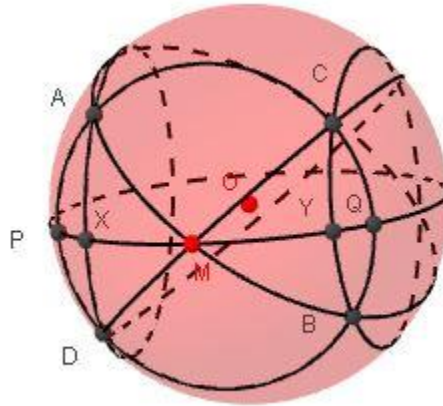
B. Pembuktian Teorema *Butterfly* di Geometri Bola

Untuk membuktikan Teorema *Butterfly* di Geometri Bola, perlu diketahui gambar *Teorema Butterfly* di geometri bola tersebut.

Langkah-langkah untuk menggambar Teorema *Butterfly* di geometri bola adalah sebagai berikut :

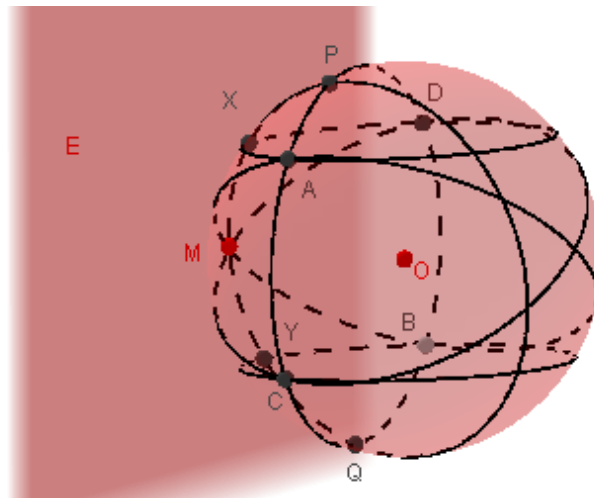
1. Ambil 2 titik sembarang di permukaan bola, yaitu titik P dan titik Q .
2. Buat garis melalui titik P dan titik Q dengan syarat bahwa garis PQ berimpit dengan lingkaran besar.
3. Misalkan titik tengah dari garis PQ adalah M .
4. Ambil 4 titik sembarang di permukaan bola yaitu A , B , C dan D . Buat garis dari titik A dan titik B melalui titik M dan buat garis dari titik C dan titik D melalui titik M . Dengan syarat bahwa garis AB dan garis CD berimpit dengan lingkaran besar.
5. Titik A , B , C , D , P dan Q terletak pada satu garis dengan syarat garis tersebut sejajar dengan lingkaran besar.

6. Buat garis dari titik A ke titik D dan Dari titik C ke titik B dengan syarat garis AD dan garis CB tegak lurus dengan garis ABCDPQ.
7. Garis AD dengan garis PQ berpotongan di titik X. Garis CB dengan garis PG berpotongan di titik Y.



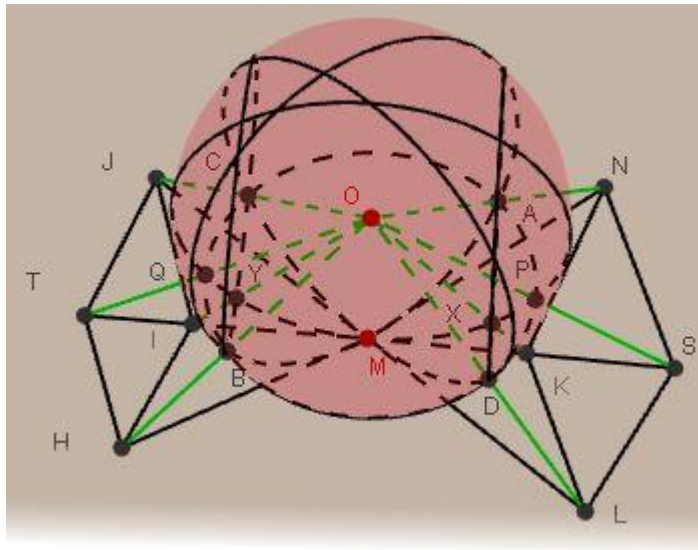
Gambar 7. Teorema *Butterfly* di Geometri Bola

Setelah gambar Teorema *Butterfly* di geometri bola diketahui, langkah selanjutnya adalah buat bidang E yang tegak lurus terhadap garis OM. Seperti gambar berikut :



Gambar 8. Geometri Bola menyinggung bidang E

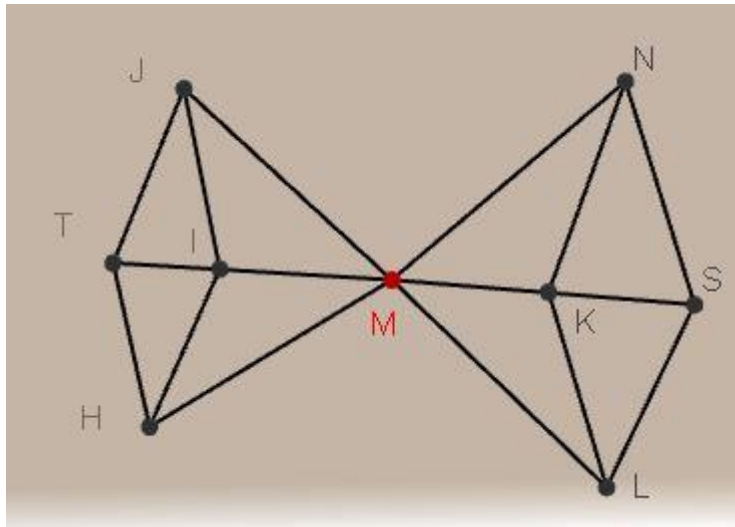
Kemudian, buat sebuah garis dari titik O yang melalui titik A hingga menembus bidang E dititik N. Begitu juga untuk garis dari titik O yang melalui titik B, C, D, P, Q, X, dan Y hingga menembus bidang E masing-masing di titik H, J, L, S, T, K dan I. Seperti gambar dibawah ini :



Gambar 9. Garis dari titik O

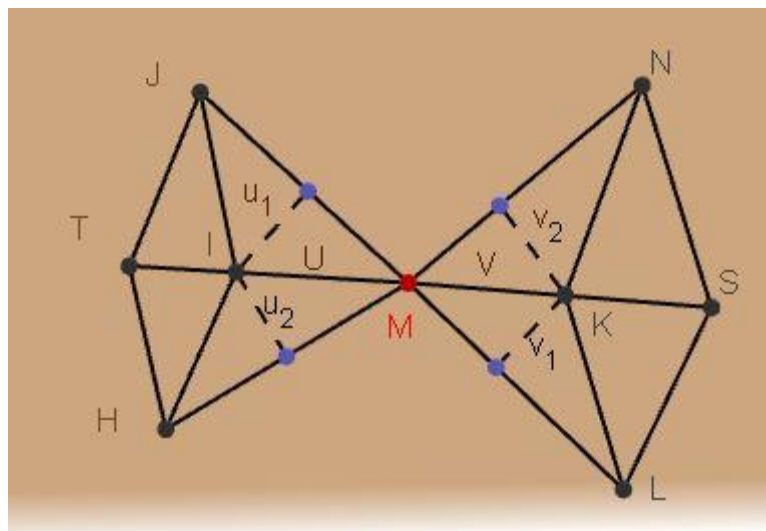
Berdasarkan gambar diatas, diketahui bahwa titik *J, T, H, L, S dan N* merupakan perpanjangan garis dari titik O ke masing-masing titik *C, Q, B, D, P dan A*, dan telah diketahui sebelumnya bahwa titik *C, Q, B, D, P dan A* berada pada satu garis yang sama sehingga panjang $MJ = MT = MH = LM = MS = MN$.

Kemudian lihat gambar yang terletak dibidang E. Tampak gambar sebagai berikut :



Gambar 10. Bangun datar hasil dari titik pusat O

Buat garis u_1 yang tegak lurus terhadap garis JM dan melalui titik I, garis u_2 yang tegak lurus terhadap garis HM dan melalui titik I, garis v_1 tegak lurus terhadap garis LM dan melalui titik K, dan garis v_2 tegak lurus terhadap garis NM dan melalui titik K. Misalkan $IM = U$ dan $KM = V$.



Gambar 11. Bangun datar hasil dari titik pusat O

Dengan menggunakan perbandingan konsep kesebangunan didapat :

$$\frac{u}{v} = \frac{u_1}{v_1} \text{ dan } \frac{u}{v} = \frac{u_2}{v_2}$$

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{IJ}{KL} = \frac{KT}{SI} \text{ dan } \frac{u_2}{v_2} = \frac{IH}{NK} = \frac{IT}{SK}$$

Sehingga

$$\frac{u^2}{v^2} = \frac{u_1 \cdot u_2}{v_1 \cdot v_2} = \frac{IJ \cdot IH}{NK \cdot KL}$$

$$\frac{u^2}{v^2} = \frac{IJ \cdot IH}{NK \cdot KL} = \frac{SK \cdot KT}{SI \cdot IT}$$

Misalkan $SM = MT = a$, sehingga

$$\frac{u^2}{v^2} = \frac{(a-u)(a+u)}{(a+v)(a-v)} = \frac{a^2 - u^2}{a^2 - v^2}$$

$$\frac{u^2}{v^2} = \frac{a^2 - u^2}{a^2 - v^2}$$

$$u^2 a^2 - u^2 v^2 = a^2 v^2 - u^2 v^2$$

$$a^2 u^2 - a^2 v^2 = -u^2 v^2 + u^2 v^2$$

$$u^2 = v^2$$

$$u = v$$

Dari pembahasan di atas, didapat $u = v$ yang berarti $IM = MK$. Titik I merupakan garis dari titik O yg melalui titik X menembus bidang E dititik I dan titik K merupakan garis dari titik O yang melalui titik Y menembus bidang E dititik K. Karena $IM = MK$, sehingga $XM = YM$ yang berarti M adalah titik tengah garis XY. (Terbukti)

4. KESIMPULAN

Teorema *Butterfly* berbunyi, misalkan M adalah titik tengah dari garis PQ dari sebuah lingkaran, di mana dua garis lain AB dan CD diambil, AD memotong PQ di X dan BC memotong PQ di Y . Buktikan bahwa M adalah juga titik tengah XY . Teorema *Butterfly* ini dapat dibuktikan di geometri bola dengan menggunakan bidang datar yang menyinggung bola sehingga akan didapatkan titik-titik yang merupakan garis dari titik pusat lingkaran yang melalui titik pada permukaan bola yang membentuk Teorema *Butterfly* sehingga Teorema *Butterfly* tergambar di bidang P . Dengan begitu, pembuktian tersebut dilakukan di bidang P dengan menggunakan konsep kesebangunan.

5. DAFTAR PUSTAKA

E-book/pdf, Kesebangunan dan Kekongruenan Bangun Datar, hlm 5.

Fiatna, Pitra. 2015. *Jenis-Jenis Segitiga yang Terbentuk Akibat Terbentuknya Sebuah Segiempat Pada Sebuah Bola*. Skripsi. Yogyakarta: FKIP Universitas Negeri Yogyakarta.

Jwilson. 2016. *Spherical Geomtry Essay*. http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT6680_f_a11/Frailey/SphericalGeometryEssay.htm. (Diakses pada 26 januari 2016).

Ludwig, Rudolf. F. *Aspects of the Butterly Theorem*. Germany. University of Maunchen.

Wikipedia. 2016. *Butterfly Theorem*. https://en.wikipedia.org/wiki/butterfly_theorem. (Diakses pada 26 januari 2016).

Yudistira, Reno. 2015. *Aturan cosinus pada geometri bola (Spherical Geometry)*. Disajikan dalam Seminar Matematika, April 2015, FKIP Universitas Sriwijaya Palembang.